RESEARCH PAPER

Nr. 2, 2005

En model for lagerstørrelsen som determinant for købs- og brugsadfærden for et kortvarigt forbrugsgode

af

Jørgen Kai Olsen

INSTITUT FOR AFSÆTNINGSØKONOMI
COPENHAGEN BUSINESS SCHOOL

SOLBJERG PLADS 3, DK-2000 FREDERIKSBERG
TEL: +45 38 15 21 00 FAX NO: +45 38 15 21 01

En model for lagerstørrelsen som determinant for købs- og brugsadfærden for et kortvarigt forbrugsgode

Jørgen Kai Olsen

Forskningsgruppen for Forbrugeradfærd
Institut for Afsætningsøkonomi
Handelshøjskolen i København
2005

Indholdsfortegnelse

1. Indledning

Mange kortvarige forbrugsgoder har den egenskab, at de ikke nødvendigvis forbruges i den periode, hvor de købes, fordi det er muligt for forbrugeren at lægge dem på lager til senere brug.
Dette gælder fx for varer som kaffe, te, øl, spiritus, læskedrikke, sæbe, vaskepulver, hårshampoo, tandpasta, papirvarer og konserves.

For denne type varer er det klart, at den aktuelle størrelse af forbrugerens lager (dvs. beholdning af varen) som hovedregel vil spille en afgørende rolle for hans købs- og brugsadfærd i en given periode. Dette forhold kommer eksempelvis implicit til udtryk, når man i kvantitative modeller for en virksomheds afsætning og/eller markedsandel finder en signifikant effekt ikke kun af den aktuelle pris for varen, men også af prisen for varen i én eller flere tidligere perioder.
Se fx Birch, Olsen og Tjur (2005).

En sådan effekt er imidlertid kun en indirekte effekt. Den direkte determinant for forbrugerens købs- og brugsadfærd er ikke prisen for varen i en tidligere periode (som man jo ikke kan købe ind til mere i den aktuelle periode), men derimod størrelsen af forbrugerens lager af varen på det tidspunkt, hvor købet og forbruget realiseres. Men det er klart, at størrelsen af det aktuelle lager vil være bestemt af prisen for varen i én eller flere tidligere perioder. Endvidere er det klart, at prisen for varen - ikke kun i én forudgående periode, men i en lang række forudgående perioder - vil være en indikator for, om prisen for varen i den aktuelle periode er høj eller lav. Det sidstnævnte forhold vil vi dog se bort fra i det følgende.

Problemstillingen i denne artikel er herefter at opstille en model for forbrugerens købs- og brugsadfærd for et kortvarigt forbrugsgode, hvor den aktuelle størrelse af forbrugerens lager af varen gøres til direkte determinant for hans adfærd. Foruden størrelsen af det aktuelle lager af varen vil vi inddrage den aktuelle pris for varen som determinant for forbrugerens købsadfærd. Når vi kun inddrager denne ene beslutningsvariabel i modellen, skyldes det alene ønsket om at simplificere fremstillingen. Modellen opbygges nemlig således, at den umiddelbart vil kunne generaliseres, ved at der inddrages yderligere forklarende variable for købs- og brugsadfærden i den, fx virksomhedens salgsindsats og konkurrenternes pris og salgsindsats.

En tilsvarende problemstilling har hyppigt været behandlet i den afsætningsøkonomiske litteratur. Se fx Jain and Vilcassim (1991) for en grundig litteraturgennemgang og modelsammenligning. Men de benyttede modeller har et noget andet udgangspunkt end vort. Dels fordi modellerne er modeller for ventetiden mellem to på hinanden følgende køb af varen. Eksempelvis eksponentialfordelingen og den negative binomialfordeling (Ehrenberg (1959)), Erlangfordelingen (Herniter (1971), Zufryden (1978), Jeuland, Bass and Wright (1980) og Gupta (1988)) og Cox's hazard model (Jain and Vilcassim (1991)). Dels fordi det aktuelle lager af varen kun indgår indirekte i modelkonstruktionen via størrelsen af det købte kvantum ved forrige køb. Den model, vi vil opstille i det følgende, er i modsætning til ovennævnte modeller en model for antal købte enheder af varen i en given periode, hvor størrelsen af det aktuelle lager af varen indgår eksplicit i modelkonstruktionen. Fordelen ved denne modelformulering er, at man får mulighed for at bestemme sandsynlighedsfordelingen for størrelsen af forbrugernes lager af varen på et givet tidspunkt.

2. Generelle forudsætninger

I det følgende forudsættes det,

- at samtlige forbrugere i målgruppen for varen – bortset fra stokastisk variation – udviser identisk købs- og brugsadfærd,
- at en given forbruger definitivt træffer sin købsbeslutning for en given periode og realiserer denne beslutning umiddelbart efter periodens start, inden periodens forbrug påbegyndes,
- at størrelsen af forbrugerens køb i en given periode – bortset fra stokastisk variation - kun afhænger af den aktuelle (og for perioden konstante) pris for varen og af størrelsen af forbrugerens lager af varen ved slutningen af den forrige periode,
- at periodens forbrug af varen foregår løbende gennem hele den betragtede periode, men
- at størrelsen af forbrugerens forbrug af varen i en given periode – bortset fra stokastisk variation - kun afhænger af den aktuelle pris for varen og af størrelsen af forbrugerens lager af varen umiddelbart efter, at forbrugeren har realiseret sin købsbeslutning for perioden, og
- at forbrugeren ønsker, at hans lager af varen på intet tidspunkt er større end K enheder.

Som nævnt forudsættes det, at såvel størrelsen af forbrugerens køb af varen som størrelsen af hans forbrug af varen afhænger af den aktuelle pris for varen og af størrelsen af hans lager af varen på det tidspunkt, hvor købs- eller brugsbeslutningen realiseres. Denne afhængighed kan naturligvis specificeres på mange måder, og den konkrete modelformulering må afhænge af den foreliggende problemstilling. Derfor vil vi ikke specificere sammenhængen eksplicit i næste afsnit, hvor den generelle model opstilles, men først i afsnit 5, hvor der bringes et eksempel på anvendelse af modellen.

3. Modelkonstruktionen

Lad $\{X_n, n=1,2,3,...\}$, $\{Y_n, n=0,1,2,...\}$, $\{U_n, n=1,2,3,...\}$ og $\{V_n, n=1,2,3,...\}$ være følger af stokastiske variable, der alle er defineret på mængden $\{0,1,2,...,K\}$, hvor

- X_n betegner størrelsen af forbrugerens lager af varen ved starten af periode nummer n umiddelbart efter, at forbrugerens købsbeslutning for periode nummer n er realiseret,
- Y_n betegner størrelsen af forbrugerens lager af varen ved slutningen af periode nummer n umiddelbart efter, at forbrugerens forbrug af varen for periode nummer n er realiseret,
- U_n betegner størrelsen af forbrugerens køb af varen i periode nummer n og
- V_n betegner størrelsen af forbrugerens forbrug af varen i periode nummer n.

Da gælder der følgende relationer mellem modellens stokastiske variable:

$$X_n = Y_{n-1} + U_n \quad og \quad Y_n = X_n - V_n \quad ; \quad n = 1,2,3,..., \; .$$

Lad endvidere $R_n = (r_{ijn})\ (i, j = 0,1,...,K\ ; n = 1,2,3,...)$ være en matrix, hvis elementer er de betingede købssandsynligheder, dvs. at $r_{ijn} = P(U_n = j \mid Y_{n-1} = i)$[1]. Under den generelle modelkonstruktion i dette afsnit vil vi som nævnt ovenfor ikke opstille specielle forudsætninger om størrelsen af r_{ijn}. Men det skal dog bemærkes, at det for alle n gælder, at $r_{ijn} = 0 \; for \; j > K - i$, at

[1] Disse (og de følgende) betingede sandsynligheder afhænger af n, fordi de afhænger af prisen for varen, der i den generelle model afhænger af periodens nummer.

$r_{K0n} = 1$, og at $r_{Kjn} = 0 \;\; for \;\; j > 0$. Dette skyldes, at vi i afsnit 2 har forudsat, at forbrugeren ønsker, at hans lager af varen på intet tidspunkt er større end K enheder.

Lad endelig $S_n = (s_{ijn}) \; (i, j = 0,1,...,K \; ; n = 1,2,3,...)$ være en matrix, hvis elementer er de betingede brugssandsynligheder, dvs. at $s_{ijn} = P(V_n = j \mid X_n = i)$. Vi vil heller ikke her opstille specielle forudsætninger om størrelsen af s_{ijn}. Men det skal dog bemærkes, at det for alle n gælder, at $s_{ijn} = 0 \;\; for \;\; j > i$, at $s_{00n} = 1$, og at $s_{0jn} = 0 \;\; for \;\; j > 0$. Dette skyldes, at vi i afsnit 2 har forudsat, at forbrugerens købsbeslutning, der træffes ved periodens start, er definitiv for perioden, hvorfor han naturligvis ikke kan bruge mere i løbet af perioden, end han har på lager umiddelbart efter, at købsbeslutningen er realiseret.

Vi vil nu formulere den dynamiske model for forbrugerens købsadfærd over tiden som en ikke-stationær Markov model.

Lad $P_n = (P_{ijn}) \; (i, j = 0,1,...,K \; ; n = 1,2,3,...)$ være den overgangssandsynlighedsmatrix, der bestemmer overgangen mellem størrelsen af forbrugerens lager af varen ved slutningen af periode nummer $n-1$ og størrelsen af forbrugerens lager af varen ved begyndelsen af periode nummer n, umiddelbart efter at købsbeslutningen for periode nummer n er realiseret. Dvs. at

$$P_{ijn} = P(X_n = j \mid Y_{n-1} = i) = P(U_n = j - i \mid Y_{n-1} = i) = r_{i(j-i)n} \quad for \quad j \geq i$$
$$P_{ijn} = 0 \quad for \quad j < i.$$

Lad endvidere $Q_n = (Q_{ijn}) \; (i, j = 0,1,...,K \; ; n = 1,2,3,...)$ være den overgangssandsynlighedsmatrix, der bestemmer overgangen mellem størrelsen af forbrugerens lager af varen umiddelbart efter, at købsbeslutningen for periode nummer n er realiseret og størrelsen af forbrugerens lager af varen ved slutningen af periode nummer n, efter at periodens forbrug er realiseret. Dvs. at

$$Q_{ijn} = P(Y_n = j \mid X_n = i) = P(V_n = i - j \mid X_n = i) = s_{i(i-j)n} \quad for \quad j \leq i$$
$$Q_{ijn} = 0 \quad for \quad j > i.$$

Lad endelig $\pi_{xn} = (\pi_{xnj})$, $\pi_{yn} = (\pi_{ynj})$, $\pi_{un} = (\pi_{unj})$, $\pi_{vn} = (\pi_{vnj})$ $(j = 0,1,\ldots,K)$ være de marginale sandsynlighedsfordelinger for hhv. X_n, Y_n, U_n *og* V_n for periode nummer n (opfattet som række-vektorer), og lad π_{y0} være den marginale fordeling for lageret ved slutningen af periode nummer 0, dvs. ved processens start.

Da gælder der,

- at den marginale fordeling af X_n er bestemt således:

$$\pi_{xn} = \pi_{y(n-1)} P_n \quad \textit{for} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

- at den marginale fordeling af Y_n er bestemt således:

$$\pi_{yn} = \pi_{xn} Q_n \quad \textit{for} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

- at den marginale fordeling af U_n er bestemt således:

$$\pi_{un} = \pi_{y(n-1)} R_n \quad \textit{for} \quad n = 1,2,3,\ldots \quad \textit{og}$$

- at den marginale fordeling af V_n er bestemt således:

$$\pi_{vn} = \pi_{xn} S_n \quad \textit{for} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Hermed er den generelle model opstillet.

I resten af dette afsnit vil vi vise, hvorledes den generelle model kan simplificeres betydeligt, hvis vi i forhold til de generelle forudsætninger, der er specificeret i afsnit 2, opstiller den supplerende forudsætning,

- at prisen for varen er konstant for en (principielt uendelig) lang række perioder.

Denne forudsætning er naturligvis kun undtagelsesvis opfyldt i praksis, men den er helt berettiget, hvis man ønsker at bestemme det optimale niveau for varens pris under den forudsætning, at alt andet er lige. (Herunder virksomhedens salgsindsats og konkurrenternes pris og salgsindsats).
Thi under alt andet lige forudsætningen er det – bortset fra de forholdsvis få perioder efter processens start, hvor de marginale fordelinger af $X_n, Y_n, U_n \; og \, V_n$ endnu ikke har stabiliseret sig – optimalt at holde prisen konstant. Dette prisoptimeringsproblem vil vi vende tilbage til i afsnit 4.

Under den supplerende forudsætning bliver Markov modellen stationær, idet matricerne $P, Q, R \, og \, S$ nu ikke længere afhænger af n. Der gælder derfor,

- at den marginale fordeling af X_n bliver

$$\pi_{x1} = \pi_{y0} P$$
$$\pi_{xn} = \pi_{x1} (QP)^{n-1} \quad for \quad n = 2, 3, 4, ...$$

- at den marginale fordeling af Y_n bliver

$$\pi_{yn} = \pi_{y0} (PQ)^n \quad for \quad n = 1, 2, 3, ...$$

- at den marginale fordeling af U_n bliver

$$\pi_{un} = \pi_{y(n-1)} R \quad for \quad n = 1, 2, 3, ... \quad og$$

- at den marginale fordeling af V_n bliver

$$\pi_{vn} = \pi_{xn} S \quad for \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Lad $\pi_{x\infty} = (\pi_{x\infty j}), \quad \pi_{y\infty} = (\pi_{y\infty j}), \quad \pi_{u\infty} = (\pi_{u\infty j}) \quad og \quad \pi_{v\infty} = (\pi_{v\infty j}) \quad (j = 0, 1, ..., K)$, hvor $\pi_{x\infty j} = \lim_{n \to \infty} \pi_{xnj}, \quad \pi_{y\infty j} = \lim_{n \to \infty} \pi_{ynj}, \quad \pi_{u\infty j} = \lim_{n \to \infty} \pi_{unj} \quad og \quad \pi_{v\infty j} = \lim_{n \to \infty} \pi_{vnj}$, betegne grænsefordelingen af hhv. $\pi_{xn}, \pi_{yn}, \pi_{un}$ *og* π_{vn}, når n går mod uendelig.

Da gælder der, at alle fire grænsefordelinger eksisterer, og at

- $\pi_{x\infty} = (\pi_{x\infty j}) = (\lim_{n\to\infty}(QP)^n{}_{ij}) \quad for\ \ j = 0,1,...,K \quad uafhængigt\ af\ \ i$
- $\pi_{y\infty} = (\pi_{y\infty j}) = (\lim_{n\to\infty}(PQ)^n{}_{ij}) \quad for\ \ j = 0,1,...,K \quad uafhængigt\ af\ \ i$
- $\pi_{u\infty} = \pi_{y\infty} R$
- $\pi_{v\infty} = \pi_{x\infty} S$.

4. Prisoptimering i modellen

I dette afsnit vil vi vise, hvorledes man kan optimere prisen for varen under den i forrige afsnit opstillede supplerende forudsætning om, at prisen er konstant for en (principielt uendelig) lang række perioder.

Lad $\{W_n, n = 1,2,3, ...\}$ være en følge af stokastiske variable, hvor W_n betegner det dækningsbidrag, som virksomheden opnår hos en given forbruger i periode nummer n. Hvis p betegner den konstante pris for varen, og c betegner de variable enhedsomkostninger, som vi også vil antage er konstante for en lang række perioder, så gælder der, at $W_n = (p-c)U_n$ og dermed, at forventningen af W_n er,

$$E(W_n) = (p-c)E(U_n) = (p-c)\sum_{j=0}^{K} j\,\pi_{unj} \ ,$$

hvor sandsynlighedsfordelingen, π_{un}, for U_n, der er udledt i afsnit 3, implicit afhænger af p.

Denne forventning afhænger imidlertid af n, men forventningen stabiliseres forholdsvis hurtigt, fordi den marginale fordeling af W_n konvergerer eksponentielt hurtigt mod sin grænseværdi.
Vi maksimerer derfor i stedet grænseværdien af dækningsbidraget pr. forbruger, når n gå mod uendelig, dvs.

$$\varphi(p) = \lim_{n\to\infty} E(W_n) = (p-c)\sum_{j=0}^{K} j\,\pi_{u\infty j} \ ,$$

som naturligvis er uafhængig af n .

Rent teknisk har vi løst dette problem ved at skrive et Pascalprogram, der maksimerer φ mht. p . Dette program vil vi benytte i næste afsnit, hvor vi betragter et simpelt eksempel på modelkonstruktionen.

5. Et eksempel på anvendelse af modellen

I dette afsnit vil vi give et eksempel på anvendelsen af modellen – herunder specielt på, hvorledes størrelsen af forbrugerens køb af varen og størrelsen af hans forbrug af varen kan gøres til en funktion såvel af varens pris som af størrelsen af det aktuelle lager af varen.

Vi vil antage,

- at det betragtede kortvarige forbrugsgode er kaffe,
- at prisen for en pose kaffe er $p = 30\ kr.$ og konstant i en lang række perioder,
- at forbrugeren ønsker, at hans lager af kaffe på intet tidspunkt er større end K = 4 poser (hvilket nedenfor viser sig at svare til 4 perioders normalforbrug),
- at fordelingen af $(U_n \mid Y_{n-1} = i)$, dvs. fordelingen af forbrugerens køb af varen, givet størrelsen af hans lager ved slutningen af forrige periode - bortset fra tilfældet $i = K$, hvor fordelingen er udartet i 0 - er en binomialfordeling, med antalsparameteren $K-i$ og sandsynlighedsparameteren θ_{1i} , således at

$$r_{ij} = P(U_n = j \mid Y_{n-1} = i) = \binom{K-i}{j}\theta_{1i}^{\ j}(1-\theta_{1i})^{K-i-j} \quad for\ i = 0,1,\ldots,K-1\,;\ j = 0,1,\ldots,K-i\ ,$$

- at sandsynlighedsparameteren θ_{1i} afhænger af prisen og lagerstørrelsen på følgende måde:

$$\theta_{1i} = \frac{\exp(\alpha_1 + \beta_1 \ln(p) + \gamma_1 \ln(i+1))}{1 + \exp(\alpha_1 + \beta_1 \ln(p) + \gamma_1 \ln(i+1))}$$

- at de parametre, der bestemmer størrelsen af forbrugerens køb givet prisen og størrelsen af hans lager af kaffe ved slutningen af forrige periode, er $\alpha_1 = 12.25,\ \beta_1 = -3.75\ og\ \gamma_1 = -1.75$,
- at fordeling af $(V_n \mid X_n = i)$, dvs. fordelingen af forbrugerens forbrug af varen, givet størrelsen af hans lager umiddelbart efter periodens køb - bortset fra tilfældet $i = 0$, hvor fordelingen er udartet i 0 - er en binomialfordeling, med antalsparameteren i og sandsynlighedsparameteren θ_{2i}, således at

$$s_{ij} = P(V_n = j \mid X_n = i) = \binom{i}{j} \theta_{2i}{}^{j} (1 - \theta_{2i})^{i-j} \quad for\ i = 1, 2, \ldots, K\ ;\ j = 0, 1, \ldots, i$$

- at sandsynlighedsparameteren θ_{2i} afhænger af prisen og lagerstørrelsen på følgende måde:

$$\theta_{2i} = \frac{\exp(\alpha_2 + \beta_2 \ln(p) + \gamma_2 \ln(i+1))}{1 + \exp(\alpha_2 + \beta_2 \ln(p) + \gamma_2 \ln(i+1))}$$

- at de parametre, der bestemmer størrelsen af forbrugerens forbrug af kaffe givet prisen og størrelsen af hans lager af kaffe umiddelbart efter periodens køb, er $\alpha_2 = 15.50,\ \beta_2 = -3.65\ og\ \gamma_2 = -2.25$, og
- at initialfordelingen for lageret ved processens start er $\pi_{y0} = (0.4,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.0)$.

Om disse forudsætninger skal det for det første bemærkes, at selv om binomialfordelingen er en diskret fordeling, der har et definitionsområde, der såvel for forbrugerens køb af varen som for hans brug af varen passer præcis til problemstillingen (modsat fx Poissonfordelingen, den geometriske fordeling og den negative binomialfordeling), så er det næppe muligt at give en adfærdsmæssig begrundelse for valget af netop denne fordeling. Men hvis man åbner mulighed for at analysere et konkret talmateriale ud fra en supplerende antagelse om overspredning eller (i det konkrete tilfælde snarere) underspredning, så kan binomialfordelingen dog næppe afvises a priori.

For det andet skal det bemærkes, at det – i hvert tilfælde i princippet – er ganske simpelt at generalisere ovenstående modeller for sandsynlighedsparametrene θ_{1i} og θ_{2i} således, at andre forklarende variable end varens pris - fx virksomhedens salgsindsats og konkurrenternes pris og salgsindsats - inddrages i modelkonstruktionen.

Under de ovenfor opstillede antagelser bliver de 4 sandsynlighedsparametre i de betingede binomialfordelinger for forbrugerens køb i en given periode

$$\theta_1 = (0.38,\ 0.15,\ 0.08,\ 0.05)$$

og de 4 betingede forventninger bliver

$$\mu_1 = (1.51,\ 0.46,\ 0.16,\ 0.05)\,.$$

Endvidere fremgår samtlige punktsandsynligheder i de 5 betingede fordelinger for forbrugerens køb af varen, givet hans lager af varen af matricen

$$R = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0.33 & 0.13 & 0.02 \\ 0.61 & 0.33 & 0.06 & 0.00 & 0.00 \\ 0.84 & 0.15 & 0.01 & 0.00 & 0.00 \\ 0.95 & 0.05 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

Om forbrugerens brug af varen i en given periode gælder, at de 4 sandsynlighedsparametre i de betingede binomialfordelinger bliver

$$\theta_2 = (\ 0.82,\ 0.65,\ 0.49,\ 0.37)\,,$$

og at de 4 betingede forventninger bliver

$$\mu_2 = (0.82,\ 1.30,\ 1.47,\ 1.48)\,.$$

Endvidere fremgår samtlige punktsandsynligheder i de 5 betingede fordelinger for forbrugerens brug af varen, givet hans lager af varen af matricen

$$S = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.18 & 0.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.12 & 0.46 & 0.42 & 0.00 & 0.00 \\ 0.13 & 0.38 & 0.37 & 0.12 & 0.00 \\ 0.16 & 0.37 & 0.32 & 0.13 & 0.02 \end{pmatrix}$$

Endelig bliver overgangssandsynlighedsmatricen for størrelsen af lageret fra før køb til efter køb

$$P = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0.33 & 0.13 & 0.02 \\ 0.00 & 0.61 & 0.33 & 0.06 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.84 & 0.15 & 0.01 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.95 & 0.05 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

medens overgangssandsynlighedsmatricen for størrelsen af lageret fra før brug til efter brug bliver

$$Q = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.82 & 0.18 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.42 & 0.46 & 0.12 & 0.00 & 0.00 \\ 0.12 & 0.37 & 0.38 & 0.13 & 0.00 \\ 0.02 & 0.13 & 0.32 & 0.37 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Vi er nu i stand til at opstille de fire marginalfordelinger $\pi_{xn}, \pi_{yn}, \pi_{un}$ og π_{vn} for ethvert n.
Dette vil vi imidlertid undlade at gøre, dels fordi disse fordelinger (for små værdier af n) afhænger af initialfordelingen π_{y0}, der er valgt forholdsvis vilkårligt, dels fordi Markovprocessen konvergerer eksponentielt hurtigt mod sin grænsefordeling, hvorfor det som hovedregel kun er denne, der har interesse.

De fire marginale grænsefordelinger og deres forventninger fremgår af nedenstående tabel 1.

Tabel 1. De marginale grænsefordelinger for
lager efter køb, lager efter brug, køb og brug.

j	$\pi_{x\infty}$	$\pi_{y\infty}$	$\pi_{u\infty}$	$\pi_{v\infty}$
0	0.09	0.58	0.38	0.22
1	0.39	0.29	0.32	0.55
2	0.37	0.10	0.21	0.21
3	0.13	0.03	0.08	0.02
4	0.02	0.00	0.01	0.00
Sum	1.00	1.00	1.00	1.00
Forventning	1.60	0.58	1.02	1.02

Som det fremgår af tabellen, er det forventede køb pr. periode, dvs. 1.02 pakker, lig med det forventede forbrug pr. periode. Og det forventede lager efter køb, dvs. 1.60 pakker, er netop 1.02 pakker større end det forventede lager efter brug, dvs. 0.58 pakker.

I eksemplet ovenfor har vi antaget, at den (for en lang række perioder) konstante pris for en pose kaffe er $p = 30\ kr.$ Hvis vi yderligere antager, at de variable enhedsomkostninger ved at producere og sælge en pose kaffe også er konstante og lig med $c = 15\ kr.$, medfører dette, at virksomheden i grænsesituationen opnår et forventet dækningsbidrag pr. forbruger pr. periode på

$$\varphi(p) = (p - c)\,E(U_\infty) = (30 - 15) \cdot 1.02 = 15.30\ kr.$$

Men dette dækningsbidrag pr. forbruger vil kun helt undtagelsesvis være det maksimalt opnåelige dækningsbidrag for virksomheden – nemlig hvis optimalprisen (tilfældigvis) er $p = 30\ kr.$

Vi vil derfor benytte det i afsnit 4 omtalte Pascal program, til at bestemme den optimale pris under de i eksemplet opstillede forudsætninger.

Med udgangspunkt i de i eksemplet benyttede tal viser en anvendelse af dette program, at optimalprisen ikke er $p = 30\ kr.$, men $p_0 = 27.93\ kr.$ Dette betyder, at den aktuelle pris bør nedsættes med 7 procent.

Hvis hele det ovenfor gennemgåede eksempel gennemregnes med den nye pris på $p_0 = 27.93\ kr.$ fås følgende resultater:

De 4 sandsynlighedsparametre i de betingede binomialfordelinger for forbrugerens køb i en given periode bliver

$$\theta_1 = (0.44,\ \ 0.19,\ \ 0.10,\ \ 0.07)$$

og de 4 betingede forventninger bliver

$$\mu_1 = (1.76,\ \ 0.57,\ \ 0.21,\ \ 0.07)\ .$$

Endvidere fremgår samtlige punktsandsynligheder i de 5 betingede fordelinger for forbrugerens køb af varen, givet hans lager af varen af matricen

$$R = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.31 & 0.36 & 0.19 & 0.04 \\ 0.53 & 0.37 & 0.09 & 0.01 & 0.00 \\ 0.80 & 0.19 & 0.01 & 0.00 & 0.00 \\ 0.93 & 0.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

Om forbrugerens brug af varen i en given periode gælder, at de 4 sandsynlighedsparametre i de betingede binomialfordelinger bliver

$$\theta_2 = (0.86,\ \ 0.71,\ \ 0.56,\ \ 0.43)\ ,$$

og at de 4 betingede forventninger bliver

$$\mu_2 = (0.86,\ 1.41,\ 1.67, 1.73)\ .$$

Endvidere fremgår samtlige punktsandsynligheder i de 5 betingede fordelinger for forbrugerens brug af varen, givet hans lager af varen af matricen

$$S = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.14 & 0.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.09 & 0.41 & 0.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0.09 & 0.33 & 0.41 & 0.17 & 0.00 \\ 0.10 & 0.32 & 0.36 & 0.18 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Endelig bliver overgangssandsynlighedsmatricen for størrelsen af lageret fra før køb til efter køb

$$P = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.31 & 0.36 & 0.19 & 0.04 \\ 0.00 & 0.53 & 0.37 & 0.09 & 0.01 \\ 0.00 & 0.00 & 0.80 & 0.19 & 0.01 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.93 & 0.07 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

medens overgangssandsynlighedsmatricen for størrelsen af lageret fra før brug til efter brug bliver

$$Q = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.86 & 0.14 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 0.41 & 0.09 & 0.00 & 0.00 \\ 0.17 & 0.41 & 0.33 & 0.09 & 0.00 \\ 0.04 & 0.18 & 0.36 & 0.32 & 0.10 \end{pmatrix}$$

Vi er nu i stand til at opstille de 4 marginale grænsefordelinger og deres forventninger jf. nedenstående tabel 2.

Tabel 2. De marginale grænsefordelinger for lager efter køb, lager efter brug, køb og brug, når prisen fastsættes optimalt.

j	$\pi_{x\infty}$	$\pi_{y\infty}$	$\pi_{u\infty}$	$\pi_{v\infty}$
0	0.06	0.57	0.32	0.16
1	0.33	0.29	0.31	0.52
2	0.40	0.11	0.24	0.28
3	0.18	0.03	0.11	0.04
4	0.03	0.00	0.02	0.00
Sum	1.00	1.00	1.00	1.00
Forventning	1.79	0.59	1.20	1.20

Som det fremgår af tabellen, bliver det forventede køb og det forventede forbrug pr. periode, når prisen er $p_0 = 27.93\ kr.$, 18 procent større - nemlig 1.20 pakker – end de 1.02 pakker, der blev købt/brugt, da prisen var $p = 30\ kr.$ Endvidere bliver det forventede lager efter køb nu 1.79 pakker (mod 1.60 pakker), medens det forventede lager efter brug bliver 0.59 pakker
(mod 0.58 pakker). Endelig gælder der, at det maksimale forventede dækningsbidrag pr. forbruger pr. periode bliver

$$\varphi(p_0) = (p_0 - c)\,E(U_\infty) = (27.93 - 15)\cdot 1.20 = 15.52\ kr.$$

Dette dækningsbidrag er kun 1 procent større, end når prisen er 30 kr., men hvis periodelængden er 1 uge, og der er 2 millioner forbrugere (husstande) på markedet, bevirker den optimale prisfastsættelse, at virksomhedens årlige dækningsbidrag øges med 23 millioner kr.

6. Konklusion

Vi har i denne artikel opstillet en generel dynamisk stokastisk model – nemlig en ikke-stationær Markov model - for forbrugernes køb, brug og lager (dvs. beholdning) af et givet kortvarigt forbrugsgode, der har den egenskab, at det ikke nødvendigvis forbruges i den periode, hvor det købes, men kan lagres af forbrugeren til senere brug.

Den generelle modelkonstruktion bygger på den antagelse, at forbrugerens købsadfærd afhænger såvel af den aktuelle pris for varen som af lagerets størrelse på det tidspunkt, hvor periodens købsbeslutning træffes. Endvidere bygger modelkonstruktionen på den antagelse, at forbrugerens brugsadfærd afhænger såvel af den aktuelle pris for varen som af lagerets størrelse umiddelbart efter, at periodens købsbeslutning er realiseret. Forslag til eksplicitte modeller for forbrugerens købs- og brugsadfærd er opstillet i det afsluttende eksempel.

For den generelle model har vi udledt såvel de periodeafhængige marginale sandsynlighedsfordelinger for forbrugerens køb, brug og lager af varen som grænsefordelingen for disse størrelser, når det forudsættes, at prisen er konstant for en lang række perioder. I det sidstnævnte tilfælde sikrer modelkonstruktionen, at forbrugerens køb af varen i grænsen bliver lig med hans forbrug af varen.

Endvidere har vi vist, hvorledes den generelle model kan benyttes som beslutningsstøttemodel for virksomheden, ved at man bestemmer den pris for varen, der maksimerer det forventede dækningsbidrag pr. forbruger pr. periode i grænsen.

Endelig har vi illustreret anvendelsen af modellen med et eksempel, hvor det betragtede kortvarige forbrugsgode er kaffe. I dette eksempel har vi dels opstillet konkrete fordelingsmæssige antagelser om modellens stokastiske variable, dels vist, hvorledes modellerne for forbrugerens købs- og brugsadfærd kan gøres til funktioner såvel af varens pris som af den aktuelle lagerstørrelse.
Disse modeller kan umiddelbart generaliseres til at omfatte andre forklarende variable end virksomhedens pris for varen. I eksemplet vises det afslutningsvis, hvorledes den optimale pris for varen skal fastsættes.

Litteraturfortegnelse

Kristina Birch, Jørgen Kai Olsen and Tue Tjur (2005)
Regression Models for Market-Shares
Preprint No. 1 / 2005, Center for Statistics
Department of Finance
CBS - Copenhagen Business School.

A. S. C. Ehrenberg (1959)
The Pattern of Consumer Purchases
Applied Statistics, Vol. 8

S. Gupta (1988)
Impact of Sales Promotions on When, What, and How Much to Buy
Journal of Marketing Research, Vol. 25

J. Herniter (1971)
A Probabilistic Market Model of Purchase Timing and Brand Selection
Management Science, Vol. 18

Dipak C. Jain and Naufel J. Vilcassim (1991)
Investigating Household Purchase Timing Decisions:
A Conditional Hazard Function Approach
Marketing Science, Vol. 10 No. 1

A. P. Jeuland, F. M. Bass and G. P. Wright (1980)
A Multibrand Stochastic Model Compounding Heterogeneous Erlang Timing
and Multinomial Choice Processes
Operations Research, Vol. 28

F. S. Zufryden (1978)
An Empirical Evaluation of a Composite Heterogeneous Model of Brand Choice and Purchase Timing Behavior
Management Science, Vol. 24