

Institut for Nationaløkonomi

Handelshøjskolen i København

Working paper 2-2001

AFKAST OG RISIKO VED AKTIEINVESTERINGER PÅ KORT OG LANG SIGT

Steen Nielsen

Ole Risager

Afkast og risiko ved aktieinvesteringer på kort og lang sigt*

Steen Nielsen og Ole Risager

Institut for Nationaløkonomi
Handelshøjskolen i København
Solbjerg Plads 3, 5.
DK-2000 Frederiksberg
Tlf. 3815 3815

E-mail: Sn.eco@cbs.dk og Or.eco@cbs.dk

Sammendrag: Dette papir beskriver afkast og risici ved investering i det danske aktiemarked over en lang historisk periode. Det er almindeligt kendt, at aktier giver et højt gennemsnitligt afkast sammenlignet med obligationer mod til gengæld at være mere risikable på kort sigt. Derimod er det mere kontroversielt, om risikoen ved langsigtede aktieinvesteringer stiger fuldt ud ligeså meget som det forventede afkast. Papiret indeholder resultater, der viser, at gode aktieår i Danmark har tendens til at efterfølges af dårlige år og omvendt. På grund af denne tendens til mean reversion er aktieinvestering gunstigere for en investor med lang horisont end for én med kort horisont. Mean reversion-fænomenet er desuden mere udpræget i Danmark end i f. eks. USA.

* Indholdet af dette papir er præsenteret på et møde for investeringschefer i danske pensionskasser hos JØP, i Nationalbankens studiekreds, på Arne Ryde-workshoppen ved Lunds Universitet samt i seminarrækken på Department of Economics, George Washington University, Washington D.C. En særlig tak for konstruktive kommentarer rettes til Eric Bentzen, Michael Bradley, Hugo Frey Jensen, Don O. Parsons, Jens Thomsen og Erik Veedfald. Vi er naturligvis eneansvarlige for indholdet. Statens Samfundsvidenskabelige Forskningsråd takkes for finansiel støtte. Tak til Christoffer Koch Sørensen for forskningsassistance.

1. Indledning

Formålet med dette papir er at give et oversigtsbillede af afkast og risici ved investering i danske aktier over en lang historisk periode. Da debatten især har fokuseret på risikoen (defineret ved standardafvigelse/variens på afkast) ved langsigtede kontra kortsigtede investeringer vil papiret særligt koncentrere sig om dette tema, der herhjemme først blev taget op af Christiansen og Lystbæk (1994). Det skyldes også, at afkastforholdene er rimeligt veldokumenterede og mindre kontroversielle. Eksempelvis har alle undersøgelser fundet, at markedsporteføljen af danske såvel som udenlandske aktier over lange historiske perioder har givet et højere gennemsnitligt afkast end andre placeringer som f.eks. obligationer, hvilket naturligvis ikke udelukker perioder med højere afkast på obligationer end på aktier. Der er også bred enighed om, at aktier på kort sigt er meget mere risikable end obligationer og at merafkastet derfor blandt andet afspejler en risikopræmie.

Det kontroversielle vedrører risikoen ved langsigtede placeringer. Spørgsmålet er om en veldiversificeret aktieportefølje er ligeså risikabel på lang sigt som på kort sigt eller om risikoen i forhold til forventet afkast aftager med investeringshorisonten? I relation til denne problematik findes der både i den danske og internationale debat to opfattelser. På den ene side er der dem der mener, at aktieafkast er tidsmæssigt uafhængige. Dette bygger ofte på en opfattelse af, at aktiemarkedet er efficient (aktiekurserne afspejler rationelt den aktuelle information) og at ny information om virksomhederne er uafhængig af aktiekurserne. Konsekvensen af uafhængige afkast er, at det højere afkast, der kan opnås ved en længere investeringsperiode, udlignes af større risiko, således at langsigtet investering ikke har gunstigere afkast i forhold til risiko end kortsigtet investering. På den anden side høres ofte den indvending, at dårlige år på aktiemarkedet sædvanligvis efterfølges af gode år og vice versa, hvilket fører til, at aktieinvestering er mindre risikabel på lang end på kort sigt. Denne vurdering baseres altså på, at aktieafkast ikke er uafhængige men derimod negativt seriekorrelerede. Dette fænomen kaldes i den engelsksprogede litteratur mean reversion, hvilket henviser til, at ekstreme aktiekurser har tendens til at blive trukket tilbage mod normale tilstande. Ofte tolkes denne type resultater i retning af markedsinefficiens.¹ F.eks. kan det være udtryk for, at aktiekurserne i kortere perioder systematisk afviger fra deres fundamentale værdier. Det kan skyldes "hysteriske" overreaktioner, modestrømninger og irrationelle forventninger.

Papiret indeholder nye resultater, der har betydning for debatten om afkast og risiko ved aktieinvestering på kort og lang sigt. Afsnit 2 beskriver de danske data og modellerne for

¹ At man ikke nødvendigvis kan drage denne slutning understreges eksempelvis af Cecchetti, Lam og Mark (1990).

aktieafkast. I afsnit 3 testes formelt, om der er mean reversion på det danske marked. Afsnit 4 refererer beslægtede danske undersøgelser, medens afsnit 5 konkluderer.

2. Afkast og risiko: Et overblik

Dette afsnit giver et overbliksbillede over afkast og risiko ved aktieinvesteringer i Danmark. Vi fokuserer både på det korte sigt, defineret som en tidshorisont på 1 år, og på det mellemlange og lange sigt, defineret ved 5, 10 og 20 års investeringshorisonter. Data dækker perioden fra 1922 til 1999 og omfatter i hele perioden 60-70 % af den samlede markedsværdi, hvorfor aktieafkastene er repræsentative for markedsporteføljen².

Det 1-årige afkast består af to komponenter, nemlig udbytteafkast og kapitalgevinst begge opgjort før skat. Da det er mest hensigtsmæssigt at operere med logaritmiske afkast, vil vi gennem hele papiret måle det 1-årige afkast som logaritmen til 1 plus det årlige afkast, hvilket er det mest almindelige i litteraturen og uden betydning for konklusionerne. Analogt hertil defineres eksempelvis det 5-årige afkast som logaritmen til den formue, man har opnået ved at holde en aktieportefølje i 5 år og løbende geninvestere udbyttet. I papiret anvendes overlappende afkast, således at eksempelvis det første 5-årige afkast dækker perioden ultimo 1921 til ultimo 1926, dvs. årene 1922-26. Det næste dækker perioden ultimo 1922 til ultimo 1927, d.v.s. årene 1923-27 etc. Vi skelner mellem nominelle og reale afkast, hvor de sidste er renset for udviklingen i forbrugerprisindekset, se Nielsen og Risager (1999) for en nærmere beskrivelse af definitioner og data.

2.1 Om afkast og risikoen for at tabe penge på kort og lang sigt

Selvom det naturligvis er det reale afkast, der er af størst interesse ud fra en økonomisk synsvinkel, kan der alligevel være grund til meget kort at beskrive udviklingen i det nominelle afkast på markedet. Det 1-årige nominelle afkast er vist i Figur 1. Det gennemsnitlige 1-årige log-afkast er på 9,3% over perioden 1922-1999. Men figuren viser også, at markedsafkastet har udvist en stigende trend for så vidt som det gennemsnitlige afkast klart er steget hen mod slutningen af perioden. Desuden er det tydeligt, at volatiliteten er vokset. Så selvom aktiemarkedet altid har været meget risikabelt på kort sigt, ser det altså ud til, at det i nyere tid er blevet endnu mere volatilt³. I den forbindelse er det interessant at notere, at ud af de 78 år, der er illustreret i Figur

² Aktieafkastene i nærværende studium er offentliggjort i Nielsen og Risager (2000). Heri findes endvidere en beskrivelse og dokumentation af aktieafkastene og andre historiske tidsserier for Danmark. Data kan fås i elektronisk form ved henvendelse til forfatterne.

³ Sharpe-ratio (gennemsnitligt afkast divideret med standardafvigelse) for de nominelle afkast er klart mindre i perioden efter 1983.

1, er der 23 år med negativt afkast. Det svarer til en andel på godt 29 %.

Fig. 1

Medens investorer altså ofte har tabt penge på kortsigtede aktieinvesteringer, er billedet noget anderledes, når man ser på længerevarende placeringer. I tilfældet med 5-årige investeringer viser Figur 2, at afkastet kun har været negativt én gang i denne lange periode. Det var ved en investering ultimo 1927, dvs. i årene 1928-32, der dækker over perioden med et af de største finansielle kollaps nogensinde, nemlig Wall Street krakket og den verdensomspændende børskrise. Opgjort pro anno var det logaritmiske 5-årige afkast ultimo 1927 på -0.8%, hvilket trods alt må siges at være et beskedent tab.

I et 10-årigt perspektiv har markedet aldrig givet et negativt nominelt afkast, se Figur 3. Ikke overraskende gælder denne konklusion også for 20-årige aktieinvesteringer. Investorer, der har haft en tidshorisont på mere end 5 år og som har investeret i markedsporteføljen af aktier, har altså aldrig tabt penge på investeringerne.

Fig. 2

Fig. 3

Lad os dernæst se på aktiemarkedets reale afkast. Vi begynder med det 1-årige afkast og kan i den forbindelse konstatere, at markedsporteføljen i 30 ud af 78 tilfælde har givet et negativt årligt realafkast, hvilket svarer til godt og vel en tredjedel af perioden, se tabel 1. Det værste år er 1974, hvor afkastet er på - 32,7%. Det skyldes dels, at aktiemarkedet klarede sig meget dårligt i 1974 (grundet store udenlandske råvareprisstigninger og markante indenlandske lønstigninger) og dels en relativt høj inflation, der i sig selv reducerer den reale forrentning.

Blandt de 5-årige aktieafkast har 14 ud af 74 været negative, hvilket altså svarer til et negativt resultat i 19% af tilfældene. 10-årige aktieinvesteringer har kun i 3 ud af 69 tilfælde givet et negativt realafkast. Det var ultimo 1938, 1961 og 1972. I ingen af disse år var tabene dog særligt store - de var alle mindre end 1% pro anno. Det betyder altså, at det reale formuetab har været på mindre end 10%. Bemærk også, at den 10-årige investering foretaget ultimo 1973 (indeholdende katastrofeåret 1974) ikke er med blandt de negative langsigtsinvesteringer. Investorer, der valgte at bibeholde aktierne på trods af det elendige 1974, endte med en realforrentning på ikke mindre end 7,1% pro anno. Endelig skal det nævnes, at der ikke kan registreres negative afkast for 20-

årige investeringer. Det betyder altså, at langsigtede investorer, der begyndte at spare op i markedsporteføljen i et hvilket som helst år mellem 1924 og 1978, alle har oplevet en positiv realvækst i aktieporteføljens værdi. Den gennemsnitlige reale bruttoforrentning for de lange investeringer har været ganske pæn, nemlig på 4,3% pro anno spændende over intervallet (0,8%;10,9%). Bemærk, at for pensionskasser er denne forrentning også den reale efter-skatforrentning, da de gennem hele perioden har været friholdt for skat på aktieafkast.

Tabel 1. Antal gange det k-årige afkast har været negativt¹⁾, 1922-99

k	Antal negative real afkast (antal observationer)	Faktiske andel (%)	Forventet andel under R.W. (%)		Dårligste år (pro-anno afkast)
			Normal	Empirisk	
1-årige aktieafkast	30 (78)	38 %	38 %	38 %	Ultimo 1973 (-32,7 %)
5-årige aktieafkast	14 (74)	19 %	25 %	26 %	Ultimo 1973 (-6,1 %)
10-årige aktieafkast	3 (69)	4 %	17 %	17 %	Ultimo 1972 (-0,6 %)
20-årige aktieafkast	0 (59)	0 %	8 %	8 %	Ultimo 1959 (+0,8 %)

1) Tallene refererer her til markedsporteføljen af aktier

Disse iagttagelser tyder på, at investering i markedsporteføljen er mindre risikabel på lang sigt end på kort sigt. Der er altså en tendens til, at markedet efter nogle voldsomme nedture eller en række sure år har rettet sig, således at det på sigt ikke er gået så galt. Dette er konsistent med mean reversion-hypotesen, men kan også på det kvalitative plan være konsistent med random-walk modellen under forudsætning af, at den underliggende vækst/drift i markedet er stærk nok til at opveje tilbageslagene. I det næste afsnit gives en beskrivelse af random-walk modellen.

2.2 Random walk-modellen

Det kumulerede aktieafkast, X_{t+k} , der følger med at investere 1 kr i markedsporteføljen i k perioder og geninvestere udbyttet, er givet ved (1), idet R_{t+1} betegner det årlige afkast i periode $t+1$. Ved at tage logaritmen til (1) fås (2), hvor det noteres at små bogstaver betegner logaritmiske værdier. Det ses, at logaritmen til formuen efter k perioder blot er summen af afkastene i de mellemliggende perioder. Tilsvarende er logaritmen til formuen efter 1 periode lig med periodens afkast. Antag nu at 1-periode afkastet, r_{t+1} , er givet ved en konstant, μ , plus et led, ε , der opfører sig som hvid støj, se (3). Det betyder, at det årlige afkast ændrer sig tilfældigt over tiden. Det indebærer, at forventningen til afkastet er konstant og dermed upåvirket af historisk information. Det er altså ligegyldigt om markedet i de foregående år er steget (faldet) kraftigt - det forventede afkast er stadig det samme. Endelig er variansen på 1-periode afkastet lig σ^2 , men kan også være tidsvarierende, jvf. senere.

$$X_{t+k} = (1+R_{t+1})(1+R_{t+2}) \cdots (1+R_{t+k}) \quad (1)$$

$$x_{t+k} = r_{t+1} + r_{t+2} + \cdots + r_{t+k} \quad (2)$$

$$r_{t+1} = \mu + \varepsilon_{t+1} \quad (3)$$

$$E(\varepsilon_t) = 0, \text{ cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \neq s \\ \sigma^2 & \text{for } t = s \end{cases}$$

Ved at substituere (3) ind i (2) fås (4). V.h.a. (4) er det let at vise, at formuen efter k perioder opfører sig som en random walk med drift i den forstand, at ændringen, $x_{t+k} - x_{t+k-1}$, er ukorreleret over tid, se (5). Den forventede værdi af k-periode formuen dannet på tidspunkt t er derfor lig k gange det forventede 1-periode afkast, μ , jvf. (6). Under random walk-hypotesen forventes formuen altså at vokse lineært over tiden, medens svingningerne omkring trenden er vilkårlig. Bemærk desuden, at variansen på k-periode formuen vokser lineært med en faktor k. Derimod vokser standardafvigelsen kun med \sqrt{k} , dvs. væsentligt langsommere.

$$x_{t+k} = k\mu + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \cdots + \varepsilon_{t+k} \quad (4)$$

$$x_{t+k} - x_{t+k-1} = \varepsilon_{t+k} \quad (5)$$

$$E(x_{t+k}) = k\mu, \text{ var}(x_{t+k}) = k\sigma^2 \quad (6)$$

2.3 Om risikoen for at tabe penge ifølge random walk-modellen

Da den forventede (logaritmiske) formue ifølge random walk-modellen vokser lineært med tiden, medens standardafvigelsen kun vokser med en faktor, der er lig kvadratroden af tiden, følger det, at trenden bliver den dominerende faktor på lang sigt, medens volatiliteten som regel er

dominerende på kort sigt. Heraf følger det intuitivt, at sandsynligheden for at tabe penge er aftagende med investeringshorisonten, hvilket på det kvalitative plan er i overensstemmelse med data.

Spørgsmålet er dernæst, om random walk-modellen også passer kvantitativt? For at nærme os svaret på dette spørgsmål antages det indledningsvist, at 1-periode afkastet er normalfordelt. Bemærk, at den logaritmiske formulering i princippet tillader 1-periode afkastene at ligge i hele intervallet $(-\infty, +\infty)$. Når man ser bort fra de ekstremt gode år 1972 og 1983, kan man statistisk set acceptere normalfordelingsantagelsen. Det gælder derfor, at $\text{Prob}(x_{t+1} < 0)$ er ækvivalent med $\text{Prob}((x_{t+1} - \mu)/\sigma < -\mu/\sigma)$.⁴ For hele stikprøve-perioden er det gennemsnitlige reale, årlige afkast lig 5,55 %, medens standardafvigelsen er 18,01%. På baggrund af disse estimater kan man beregne, hvor ofte markedet ifølge random walk-modellen vil generere negative afkast. Forudsigelsen er, at 38 % af 1-periode afkastene vil være negative, hvilket er i overensstemmelse med virkeligheden, se tabel 1. Ifølge random walk-modellen og normalfordelingsantagelsen er sandsynligheden for at få et negativt k-periode afkast, $\text{Prob}(x_{t+k} < 0)$, hvilket er ækvivalent med $\text{Prob}((x_{t+k} - k\mu)/k^{0.5}\sigma < -k\mu/k^{0.5}\sigma)$. Heraf følger det, at 25% af 5-periode afkastene skal være negative, men dette overstiger den faktiske andel, der er 19%. Random walk-modellen indebærer desuden, at 17% af de 10-årige afkast skal være negative, medens den faktiske andel kun er 4%. Endelig bør hele 8% af de 20-årige afkast være negative, hvilket står i skarp kontrast til, at der endnu aldrig er konstateret tab på denne horisont.⁵

En afgørende forudsætning bag ovennævnte beregninger er estimeret på Sharpe-ratioen μ/σ , der er lig 0,308. Det er klart, at desto højere afkastet er i.f.t. risikoen, desto større betydning får trenden i.f.t. volatiliteten. Det er derfor vigtigt at nævne, at selv med en Sharpe-ratio, der er 20 % højere, er random walk prædiktionerne for pessimistiske i forhold til de historiske data. Random walk-modellen synes derfor i kombination med normalfordelingsantagelsen at overdrive den langsigtede risiko.

Da normalfordelingsantagelsen som nævnt ovenfor ikke helt er opfyldt, er der grund til at se nærmere på betydningen af denne forudsætning. Lad os derfor erstatte den med en antagelse om, at de årlige afkast er fordelt omkring middelværdien på samme måde som i den historiske

⁴ Bemærk, at sandsynligheden for at have mistet noget af den investerede krone 1 år efter investeringen er påbegyndt svarer til sandsynligheden for at 1-periode afkastet er negativt, dvs. $\text{Prob}(x_{t+1} < 0)$.

⁵ Dette betyder dog næppe, at sandsynligheden for et negativt, fremtidigt 20-årigt afkast er præcis nul, men blot at den er meget lille.

stikprøve. Antagelsen om afkastenes uafhængighed bevares ved at konstruere et udtræk fra stikprøvefordelingen, hvor hver enkelt observation i stikprøven tildeles samme sandsynlighed for udtrækning, dvs. at eventuelle tidsmæssige mønstre i data ikke optræder i det konstruerede udtræk. På basis af et sådant udtræk af 200.000 tidsserier med hver 78 observationer kan frekvensen af tab beregnes ved forskellige horisonter under random walk-modellen med den empiriske fordeling. Resultatet er vist i femte kolonne i tabel 1. Tabellen viser, at de to udgaver af random walk-modellen med henholdsvis normal- og empirisk fordeling stort set giver ens resultater. Derfor må man sige, at det altså ikke er normalfordelingsantagelsen, der får random walk-modellen til at tage fejl. Istedet synes problemet at være, at modellen ikke tager hensyn til den tidsmæssige struktur i data.

Lad os dernæst diskutere betydningen af de meget gunstige aktieår, hvor vi specielt tænker på 1972 og 1983. Det er klart, at meget gode år trækker i retning af, at vi får relativt mange flerperiode afkast, der er store. Da de gode år imidlertid til dels afspejler meget dårlige år forinden vil det næppe være rimeligt at sige, at de skal udelades fra beregningerne. Rekordåret 1983 må således blandt andet fortolkes som en reaktion på de elendige 1970ere. I 1982/83 ændres den makroøkonomiske strategi for både finans- og valutakurspolitikken, se Andersen og Risager (1988), hvilket resulterer i et stort rentefald samt i større optimisme og risikovillighed⁶. Da dette regimeskift kun kan forstås på baggrund af den økonomiske udvikling i årene forinden, må 1983 betragtes som en del af markedets historie ligesåvel som 1970erne er det. Selvom historien sjældent gentager sig helt eksakt, kan vi også i fremtiden komme ud for parallelle forløb med en række sure år, der delvist hænger sammen med en ubalanceret økonomisk politik og dermed forbundne rekordhøje renter og lønstigninger og så efterfølgende en genopretning, der sender aktiemarkedet op. M.h.t. 1972 gælder det, at meget af opgangen i dette år kan tilskrives vores indtræden i EF. Men da vi i fremtiden kan komme ud for tilsvarende positive stød f.eks. i form af en indtræden i ØMUen, vil det også være urimeligt helt at se bort fra dette år. I den sammenhæng kan det iøvrigt oplyses, at selvom vi kun medtager en tredjedel af 1972-afkastet i beregningerne, så fås stadig resultater, der tyder på, at random walk-modellen er for pessimistisk i forhold til de afkast, vi kan måle i virkelighedens verden.

Når random walk-modellen synes at overdrive risikoen på længere sigt, hænger det sammen med antagelsen om, at 1-periode afkastene er ukorrelerede, jvf. omtalen af støjledet i (3). I relation til det danske marked er det således relativt enkelt at vise, at der er en tendens til negativ seriekorrelation, at denne tendens som hovedregel er statistisk signifikant ved sædvanlige

⁶ Realrenteafgiften indføres desuden med virkning fra 1984, hvilket gjorde aktier mere interessante for de institutionelle afgiftspligtige investorer.

signifikansniveauer og at tendensen er stærkest i nyere tid, hvilket vi skal dokumentere i næste afsnit. Inden da skal vi kort forklare betydningen af negativ seriekorrelation i afkastprocessen. Så lad os se på konsekvensen af, at 1-periode afkastene opfører sig som en simpel AR(1) proces med negativ seriekorrelation, se (7), hvor parameteren α er positiv men mindre end 1, medens den i random walk-tilfældet antages at være lig 0.

$$r_{t+1} = \mu - \alpha r_t + \varepsilon_{t+1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7)$$

Det følger umiddelbart, at hvis foregående periodes afkast, r_t , var meget højt, trækker dette i retning af et mindre positivt afkast i denne periode, hvilket dog kan opvejes af et positivt stød, ε_{t+1} . Der er således tendens til, at gode (dårlige) år efterfølges af dårlige (gode). Aktieafkastene er dog på grund af det stokastiske element ikke enkle at forudsige, så mean reversion gør det ikke særligt meget lettere at time markedet. Det skal dog bemærkes, at hvis markedet i en årrække har klaret sig ekstraordinært godt, som det danske gjorde i perioden 1995-97, vil en model med mean reversion typisk give anledning til en nedjustering af forventningerne, hvilket også er en vigtig forklaring på, at Olesen og Risager (1999) forudsiger, at det 5-årige aktieafkast vil være beskedent i årene 1998-2002.

Statistisk set identificeres mean reversion-hypotesen med negativ seriekorrelation i afkastprocessen, hvilket giver anledning til, at variansen på k-periode afkastet ikke vokser lineært med tiden men med en faktor, der er mindre. Dette er den grundlæggende idé i variance-ratio testet, se (8). I variance-ratio testet indgår i tælleren variansen på k-periode afkastet divideret med k og i nævneren variansen på 1-periode afkastet. Under random walk hypotesen vil test-statistikken være lig 1, jvf. (8), medens den vil være mindre end 1 under mean reversion-hypotesen. Endelig er der muligheden for mean aversion, dvs. at variansen vokser hurtigere end tiden. I så fald er test-statistikken større end 1⁷.

$$VR(k) = \frac{\text{var}(x_{t+k})/k}{\text{var}(x_t)} = \begin{cases} = 1 & \text{under random walk} \\ < 1 & \text{under mean reversion} \\ > 1 & \text{under mean aversion} \end{cases} \quad (8)$$

⁷ Dette fænomen forekommer til tider i høj-frekvente data (minut-, time-, dag-, uge-, månedsafkast).

I tilfældet med mean reversion vokser variansen på k-periode afkastet altså mindre hurtigt end tiden. Hvis det forventede k-periode afkast følger tidstrenden, vil variansen per afkastenhed set over investeringshorisonten være aftagende. Det er i denne forstand, at der er tale om tidsdiversifikation.

3. Beregning af varianser og variance-ratio tests af random walk-modellen

Da måden at beregne varianser på er af stor betydning for diskussionen af kortsigtet versus langsigtet risiko følger der her en gennemgang af dette emne. Variansen på det 1-årige afkast kan estimeres ved

$$\hat{\sigma}_{k=1}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \left[x_t - x_{t-1} - \frac{1}{T}(x_T - x_0) \right]^2, \quad (9)$$

hvor $x_t - x_{t-1}$ blot er 1-periode afkastet fra t-1 til t, jvf. (2) og hvor $(1/T)(x_T - x_0)$ er det estimerede gennemsnitsafkast, idet vi har T afkast. Bemærk at der divideres med T-1 udenfor parantesen for at få et unbiased estimat.

Medens formel (9) er velkendt, er det mere kompliceret at estimere variansen på de langsigtede afkast. Vi begynder med at se på 2-periode afkastet. Da vi bruger overlappende observationer kan vi konstatere, at vi har T-1 observationer. Det er derfor nærliggende at tro, at variansen kan estimeres ved

$$\frac{1}{T-2} \sum_{t=2}^T \left[x_t - x_{t-2} - \frac{2}{T}(x_T - x_0) \right]^2,$$

men dette estimat undervurderer variansen. I en vigtig artikel af Cochrane (1988) vises det, at man skal multiplicere ovennævnte udtryk med en faktor $T/(T-1)$ for at få et unbiased estimat under H_0 hypotesen, at den underliggende datagenererende proces er en random walk. Bemærk desuden, at det, der indgår i formlen, er 2-periode afkastet, $x_{t+1} - x_{t-1}$ etc. Det er altså ikke det annualiserede 2-periode afkast, der fås ved at dividere ovenstående med en faktor 2. Når denne detalje fremhæves, er det fordi, at anvendelsen af annualiserede afkast (der er gennemsnit) fører til en undervurdering af variansen, fordi gennemsnit udglatter data⁸.

⁸ I Christiansen & Lystbæk (1994) anvendes annualiserede afkast. Herved kommer man til at signalere, at variansen er aftagende over investeringshorisonten, jvf. Figur 2 og 3 i deres papir, hvilket generelt er forkert, jvf. også Nielsen og Risager (1999).

For det generelle k-periode tilfælde er variansestimatorens givet ved

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{T}{(T-k)(T-k+1)} \sum_{t=k}^T \left[x_t - x_{t-k} - \frac{k}{T}(x_T - x_0) \right]^2, \quad (10)$$

Det bemærkes, at korrektionsfaktoren $T/(T-k+1)$ er ganske betragtelig for langsigtede afkast i endelige stikprøver. Når stikprøven bliver meget stor, aftager betydningen af korrektionsfaktoren.

Med udgangspunkt i det anvendte datasæt og i formel (10) er varianserne estimeret i Tabel 2.

Tabel 2. Varians på k-års reale aktieafkast, 1921(x_0)-1999(x_T)

k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=10
0,032	0,049	0,067	0,085	0,099	0,145

En 1-årig varians på 0.032 (afrundet) giver en standardafvigelse på 0.180. For denne periode er det gennemsnitlige reale afkast lig 0.056. For at give en ide om betydningen af estimatet på afkast og standardafvigelse kan det noteres, at med normalfordelingsforudsætningen er 95% konfidensintervallet givet ved (-0,297; +0,409). Her er det vigtigt at understrege, at normalfordelingsantagelsen kun er approksimativt korrekt. Desuagtet dette forhold, kan vi notere, at der er tale om et meget bredt bånd, der viser at markedet er meget risikabelt på kort sigt. Omregnet til afkast i naturlige enheder (i modsætning til log-afkast) modsvarer det venstre ben et afkast på -25,70%. Aktiemarkedet har kun én gang i historien givet et ringere afkast, nemlig i 1974. Omregnet til naturlige enheder modsvarer højre ben et afkast på 50,53%, der kun er overgået i 1972 og 1983.

Variansen på 2-års sigt er langt mindre end to gange 1-periode variansen, hvilket tyder på mean reversion, jvf. senere. Under forudsætning af, at det forventede 2-periode afkast er to gange 1-periode afkastet bliver det approksimative 95 % konfidensinterval (-0,322; +0,546). Hvis vi betragter det venstre ben som et estimat på tabsrisikoen, noteres det, at risikoen på en 2-årig investering kun er marginalt større end risikoen på en 1-årig investering. Det indebærer, at hvis det er gået rigtig skidt det første år, så har risikoen ved at blive på markedet endnu et år været meget ringe.

Konfidensintervallet på 5-årigt sigt er (-0,337; +0,897), hvilket igen kun er vejledende, da normalfordelingsantagelsen ikke er helt korrekt. Igen er der altså en tendens til en ret begrænset

stigning i tabsrisikoen i.f.t. 1-års investeringen, medens gevinstmulighederne er vokset enormt. Endelig er det interessant at notere, at tabsrisikoen på 10-årigt sigt tilsyneladende er mindre end på det 1-årige sigt, men da der er knyttet meget stor usikkerhed til beregningerne for de lange horisonter, vil vi ikke formelt teste disse forskelle.

Konklusionen på disse betragtninger er følgende: Medens det synes rimeligt at antage, at k-periode afkastet vokser lineært med tiden, peger variansestimaterne på, at risikoen ikke vokser lineært, men at der er en afbøjning i risikoen. Risiko-afkast forholdet synes derfor at være aftagende over tiden. Selvom denne tendens er klar, er spørgsmålet dog, om den statistisk er stærk nok til at forkaste random walk-hypotesen.

I relation hertil er det vigtigt at notere, at afkastprocessen synes at udvise større volatilitet henimod slutningen af perioden. Testet vi rapporterer nedenfor korrigerer for denne tendens til heteroskedasticitet, jvf. iøvrigt også omtalen af regimeskift-modellen i næste afsnit. Med korrektionen for heteroskedasticitet bliver det sværere at falsificere random walk-hypotesen, se også Risager (1998).

Tabel 3. Variance-ratio tests på reale aktieafkast, 1922-99

	Investeringshorisont (år)		
	2	3	4
Variance Ratio ($\hat{\sigma}_k^2/k\hat{\sigma}_1^2$)	0,75	0,69	0,66
Teststatistik under heteroskedasticitet (normalfordelt)	-1,88	-1,53	-1,34
Prob. værdi	0,06	0,13	0,18

Tolkningen af tabellen afhænger i nogen grad af det valgte signifikansniveau. Hvis man vælger et 10% signifikansniveau, leder tabellen til afvisning af random walk hypotesen for en investeringshorisont på 2 år. En 2-årig investering er altså mindre risikabel end to gange risikoen på en 1-årig investering. Med dette signifikansniveau er der således en statistisk signifikant

tendens til, at dårlige (gode) år afløses af gode (dårlige) år, mens afgørelsen ved et 5% signifikansniveau er mere hårfin. Når man tester på 3- og 4-årige horisonter, er resultaterne ikke så klare. På 3-årigt sigt kan vi forkaste random walk på 13%-niveauet og på 4-årigt sigt på 18%-niveauet. I sidste tilfælde betyder dette, at hvis man forkaster random walk-hypotesen, er der 18% risiko for, at man forkaster en sand model.

Til sammenligning kan nævnes, at variance ratios for det reale afkast på NYSE er henholdsvis 0.97, 0.87 og 0.75 på 2, 3 og 4 års horisonterne, se Poterba og Summers (1988). Resultaterne viser, at der er meget mere negativ seriekorrelation i de danske data. Man skal derfor ikke uden videre overføre resultater/konklusioner fra USA til Danmark.

Den kraftige indikation på mean reversion på den 2-årige horisont hænger sammen med, at der er en signifikant tendens til 1.ordens negativ seriekorrelation i data. For at give et eksempel på dette kan vi kort referere resultaterne af at estimere en AR(6)-proces for ovennævnte periode. Hvis man successivt fjerner insignifikante lags, ender man med følgende model,

$$r_{t+1} = 0,044 - 0,238r_t + 0,555D72 + 0,684D83 + \varepsilon_{t+1} \quad (11)$$

(2,44) (2,28) (29,43) (39,00)

hvor tallet i parentes under koefficienten er White's t-statistik og hvor D72 og D83 er dummy variable for 1972 og 1983.⁹ Ved at forkorte stikprøve-perioden er det let at vise, at tendensen til negativ seriekorrelation er stærkest i nyere tid, se Risager (1998) og Nielsen og Olesen (1999).

Supplerende indsigt fås ved at beregne det såkaldte Ljung-Box test, der anvendes til at afgøre, hvorvidt alle autokorrelationskoefficienter op til lag k er lig med nul. Resultaterne gengives i Tabel 4 sammen med tilsvarende resultater for det amerikanske S&P500-indeks.

Først testes hypotesen, at der er første ordens seriekorrelation overfor nul-hypotesen, at det er en random walk. Dernæst testes om afkast processen med to lags afviger systematisk fra random walk, der siger at laggene er insignifikante. Dernæst ses på processen med tre lags etc. For Danmark er koefficienterne ved de første to lags forskellige fra nul, hvilket skyldes den meget negative førsteordens autokorrelation. Dernæst følger en række insignifikante koefficienter, medens der igen er tegn på signifikant seriekorrelation hvis tilstrækkeligt lange lags medtages. Tallene for USA tyder derimod ikke på samme grad af seriekorrelation som i Danmark.

⁹ Uden dummy-variablene synes tendensen til negativ seriekorrelation at være endnu stærkere, men t-teststatistikken er mere problematisk at fortolke i dette tilfælde.

Det er dog interessant at notere, at en international analyse af 18 lande viser, at der er meget stærk tendens til mean reversion i relative aktieindeks, hvilket vil sige at der er signifikant tendens til at et markeds over-/underperformance efterfølges af det modsatte, se Balvers, Wu og Gilliland (2000).

Tabel 4. Ljung-Box Autokorrelation Test af 1-årige reale afkast i Danmark og USA (S&P-500)^{1),2)}

Forsinkel se (lag)	Danmark			USA		
	Autokorrela- tion koeffici- ent	S.E.	Ljung-Box statistik	Autokorrela- tion koeffici- ent	S.E.	Ljung-Box statistik
1	-0,262	0,116	5,56[0,02]	0.048	0.093	0.27[0.61]
2	0,025	0,125	5,61[0,06]	-0.160	0.093	3.21[0.20]
3	-0,005	0,126	5,61[0,13]	0.096	0.096	4.28[0.23]
4	-0,038	0,126	5,73[0,22]	-0.040	0.097	4.47[0.35]
5	-0,093	0,126	6,47[0,26]	-0.053	0.097	4.79[0.44]
6	0,072	0,126	6,92[0,33]	0.014	0.097	4.81[0.57]
7	-0,164	0,127	9,29[0,23]	0.139	0.097	7.04[0.42]
8	0,256	0,129	15,15[0,06]	-0.109	0.099	8.41[0.39]
9	-0,192	0,135	18,47[0,03]	-0.024	0.100	8.47[0.49]
10	0,125	0,141	19,90[0,03]	0.051	0.100	8.77[0.55]
11	0,011	0,146	19,91[0,05]	-0.144	0.102	11.14[0.43]
12	-0,071	0,146	20,39[0,06]	-0.097	0.102	12.22[0.43]

1) Ljung-Box statistik = $N(N+2) \sum_{k=1}^m \frac{\rho^2(k)}{N-k}$, hvor N er antalobservationer i stikprøven, $\rho(k)$ er autokorrelationen med forsinkelse(lag) k . Tallene i firkantede parenteser er sandsynlighedsværdier.

2) Reale afkast for årlige S&P-500. Observationer fra 1872-1986; Kilde: Mills (1993).

Det forhold, at L-B testet peger på mean reversion i mere end halvdelen af tilfældene, er ganske stærkt i lyset af, at testet har ringe styrke i små stikprøver, dvs. at der er stor risiko for at konkludere til fordel for en falsk nul-hypotese. For at illustrere dette har vi foretaget følgende eksperiment: Vi har først estimeret en AR(1) proces på de danske tal. Dernæst har denne

empiriske model, der udviser negativ seriekorrelation, genereret et antal dataserier, som så efterfølgende er blevet underkastet L-B testet. Når stikprøvestørrelsen er på 1000 afviser L-B testet korrekt random walk. Men når stikprøven er på 75, hvad der svarer til vores stikprøve, konkluderer L-B testet i 42 % af tilfældene, at data er generet af random-walk modellen på trods af, at data er konstrueret med seriekorrelation, se Tabel 5.

Tabel 5. Ljung-Box testets styrke ved forskellige stikprøvestørrelser

Stikprøvestørrelse	Sandsynlighed for accept af H_0
1000	0
200	5
100	29
75	42
50	52
25	73

Note: Data er genereret af modellen: $r_{t+1} = \mu - \alpha r_t + \sigma \varepsilon_{t+1}$, hvor $\mu = 0,062$, $\alpha = 0,250$, $\sigma = 0,175$, og $\varepsilon_{t+1} \sim \text{n.i.d.}(0,1)$. Parametrene er estimeret på danske data, 1922-99.

Konklusionen er altså, at L-B testet i gængse stikprøver har en tendens til at konkludere til fordel for random-walk hypotesen, hvilket man bør have in mente i vurderingen af de konklusioner der kan udledes på basis af L-B testet.

4. Andre undersøgelser af danske data

Som vist i Figur 1 er afkastenes middelværdi og volatilitet tilsyneladende steget i slutningen af stikprøven. Derfor er det relevant at spørge, om den negative seriekorrelation er robust overfor en modellering af afkastprocessen, der eksplicit tager højde for dette regimeskift. Nielsen og Olesen (1999) estimerer en model, der generaliserer (7) ved at tillade skift mellem regimer med forskellig middelværdi, AR-koefficient og residualvarians. Afkastenes skift mellem regimerne foudsættes at ske stokastisk i henhold til en Markov proces. Den bedste beskrivelse af de danske data fås ved at tillade to regimer og medtage dummy-variable for 1972 og 1983. I denne formulering er modellen velspecificeret ifølge alle gængse tests.

Af en analyse af regimernes timing fremgår det, at det første regime med få undtagelser dominerede perioden frem til begyndelsen af 1970erne. I dette regime var middelværdien af de nominelle afkast 5,7% pro anno og standardafvigelsen var 7,5%. Siden 1973 og særligt siden begyndelsen af 1980erne er afkastene med overvejende sandsynlighed genereret af det andet regime. De nominelle afkast i dette regime har en middelværdi på 13,9% og en standardafvigelse

på 20,6%. Analysen bekræfter således indtrykket fra Figur 1, nemlig at det nuværende regime har højt afkast og høj volatilitet sammenlignet med perioden før 1970erne. Såvel det gennemsnitlige afkast som volatiliteten er statistisk forskellige i de to regimer.

Papiret udvikler desuden tests for førsteordens seriekorrelation. I det seneste regime er korrelationskoefficienten $-0,33$, hvilket er forskelligt fra nul ved et signifikansniveau på $0,6\%$. M.a.o. er der endog meget stærk mean reversion i nyere tid. På tværs af regimerne viser det sig, at der er negativ seriekorrelation på 8% signifikansniveau. I sammenligning med resultaterne i det foregående afsnit betyder dette, at seriekorrelationen er lidt svagere for perioden som helhed, når der tillades for regimeskift.

Darenhill (1997) og Hansson (1999) undersøger bl.a. også spørgsmålet om mean reversion på basis af Lund (1992)'s danske datasæt, der omfatter 16 store danske virksomheder. Da antallet af observationer trods alt er begrænset, når vi ser på afkast på 5 og 10 års horisonter simuleres afkast v.h.a. bootstrapping (re-sampling). Resultaterne understøtter ifølge forfatterne mean reversion-hypotesen, se også estimaterne af konfidensintervallerne i Figur C3.3 i Hansson (1999).

Timmermann (1992) undersøger, om kursgevinsterne, dvs. det årlige afkast ekskl. udbytte, på det danske aktiemarked i perioden 1914-90 opfører sig som en random walk. Timmermann konkluderer, at der er tegn på en "betydelig stationær komponent i kurserne", dvs. tegn på mean reversion.

Vi er ikke bekendt med empiriske undersøgelser af danske data, der forkaster mean reversion-hypotesen.

5. Konklusion

De eksisterende undersøgelser af det danske aktiemarked understøtter helt eller delvist mean reversion-hypotesen i den forstand, at variansen på afkastene ikke synes at vokse lineært over tiden, hvorfor risikoen i forhold til forventet afkast synes at være aftagende med investeringshorisonten. På 2-årigt sigt er der således en statistisk signifikant afvisning af random walk-modellen og støtte for mean reversion. På de længerevarende horisonter er tendensen i data ligeledes klar, omend man som hovedregel ikke ved konventionelle signifikansniveauer kan afvise random walk-modellen. Med andre ord indebærer en afvisning af random walk-modellen en større risiko end der sædvanligvis tages i videnskabelige undersøgelser, hvor man som oftest arbejder med signifikansniveauer på 5 eller 10%.

At random walk-modellen trods alt er vanskelig at afvise, skyldes, at rimeligt effiente markeder må antages delvist at foruddiskontere betydningen af negativ seriekorrelation og derved bidrage til at svække dette fænomen. Dette trækker i retning af, at der ikke er mean reversion på ultrakort sigt, men på længere horisonter synes denne effekt at aftage i betydning. Når vi ser en tendens til negativ seriekorrelation udover det ultrakorte sigt, kan det fortolkes således, at markedet ofte overreagerer - eller mere blomstrende udtrykt: opfører sig hysterisk. Og dette gælder både når markedet bevæger sig opad og nedad. Sådanne overreaktioner i forhold til aktiernes fundamentale værdi korrigeres efterfølgende, og det er denne korrektionsproces, der formodes, at generere tendensen til mean reversion.

Implikationen af mean reversion er, at det for en risikoavers investor vil kunne betale sig at forøge aktieandelen med investeringshorisonten, se Samuelson (1991). Derimod vil det formentlig kun i begrænset omfang være attraktivt at udnytte seriekorrelationen til mere kortsigtede strategier, da det nøjagtige tidspunkt for en korrektion er særdeles vanskeligt at forudsige. Det ser dog ud til at være muligt at udnytte internationale tendenser til at sammensætte gunstige porteføljer, der bygger på ideen om mean reversion, jvf. Balvers, Wu og Gilliland (2000).

Referencer

Andersen, T.M. og O. Risager (1988) 'Stabilization policies, credibility, and interest rate determination in a small open economy', *European Economic Review*, 32, pp. 669-79.

Balvers, R., Y. Wu og E. Gilliland (2000), 'Mean reversion across national stock markets and parametric contrarian investment strategies ', *Journal of Finance* (55), pp. 745-72.

Cecchetti, S.G., P-S Lam og N.C. Mark (1990), 'Mean reversion in equilibrium asset prices', *American Economic Review* 80 (3), pp. 398-418.

Christiansen, J. og B. Lystbæk (1994) 'Afkast og risiko på aktier og obligationer 1915-1993', *Finans/Invest*, pp. 10-13.

Cochrane, J.H. (1988) 'How big is the random walk in GNP?', *Journal of Political Economy* 96, pp. 893-920.

Darenhill, C. (1997) 'Tidsdiversificering - en empirisk studie av investeringsförhållanden i Sverige och Danmark' MA Thesis, Department of Economics, Lund's Universitet.

Hansson, B. (1999) 'Comment' i *Macroeconomic Perspectives on the Danish Economy*, T.M. Andersen, S.E.H. Jensen og O. Risager (red.), Macmillan, London.

Lund, J. (1992) 'Rationelle bobler i de danske aktiekurser 1923-1991 - en empirisk analyse', *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 130, pp. 483-97.

Mills, T.C. (1993) 'The Econometric Modelling of Financial Time Series', Cambridge University Press.

Nielsen, S. og J.O. Olesen (1999) 'Regime-switching stock returns and mean reversion', working paper, Institut for Nationaløkonomi, Handelshøjskolen i København.

Nielsen, S. og O. Risager (1999) 'Macroeconomic perspectives on stock and bond investments in Denmark since the first world war' i *Macroeconomic Perspectives on the Danish Economy*, T.M. Andersen, S.E.H. Jensen og O. Risager (red.), Macmillan, London.

Nielsen, S. og O. Risager (2000), 'Stock returns and bond yields in Denmark, 1922-99', working paper, Institut for Nationaløkonomi, Handelshøjskolen i København.

Olesen, J.O. og O. Risager (1999) 'On the predictability of the Danish equity premium', working paper, Handelshøjskolen i København.

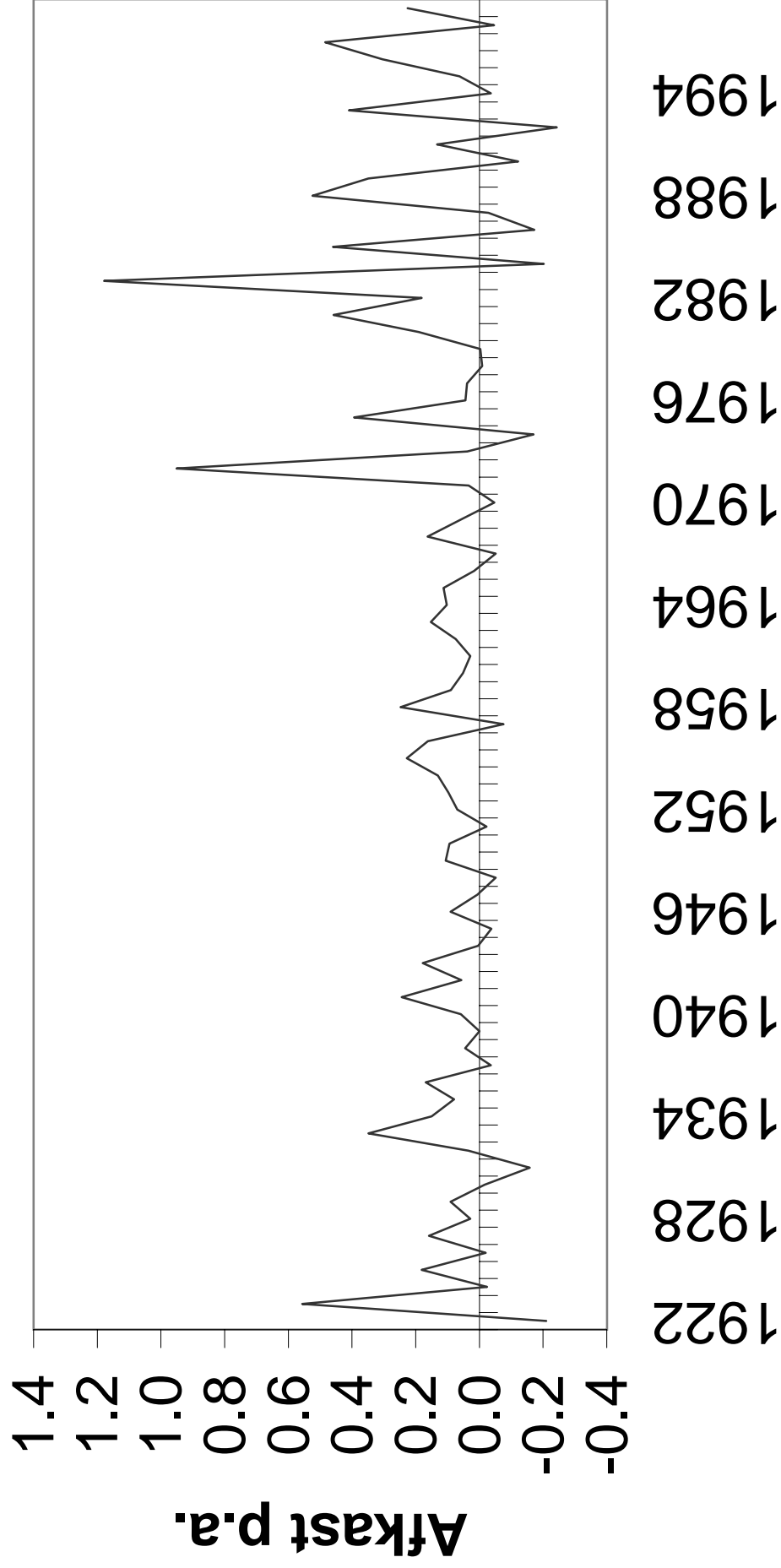
Poterba, J.M. og L.H. Summers (1988) 'Mean Reversion in Stock Prices-Evidence and Implications', *Journal of Financial Economics* 22, 27-59

Risager, O. (1998) 'Random walk or mean reversion: The Danish stock market since world war I', EPRU working paper, Institut for Nationaløkonomi, Handelshøjskolen i København.

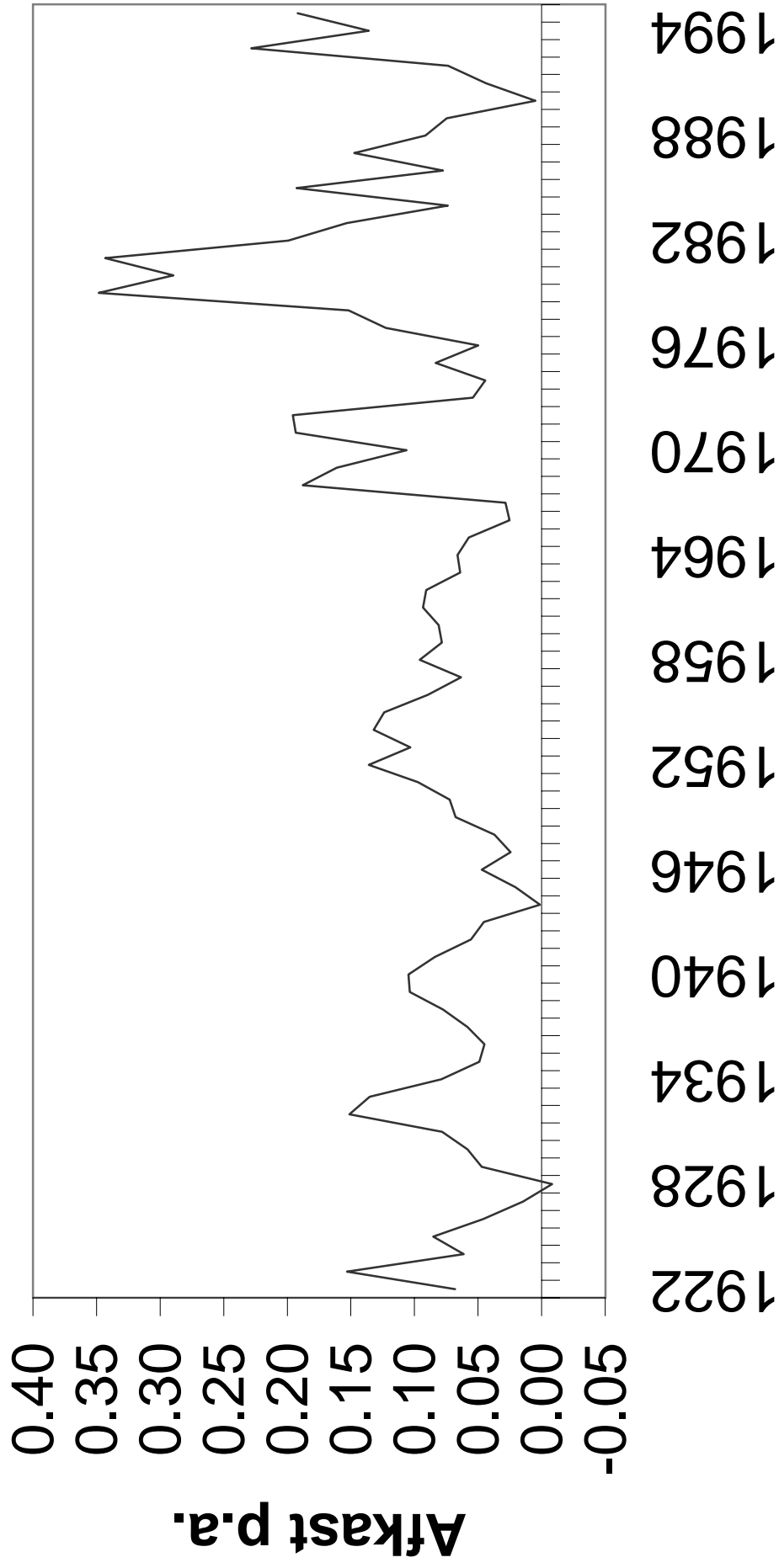
Samuelson, P.A. (1991) 'Long-run risk tolerance when equity returns are mean regressing: Pseudoparadoxes and vindication of "business man's risk"', i *Money, Macroeconomics, and Economic Policy*, W.C. Brainard og H.W. Watts (red.), The MIT Press, pp. 181-200.

Timmermann, A. (1992), 'Udviklingen i de danske aktiekurser 1914-1990', *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 130, pp. 473-82.

**Figur 1. 1-årige nominelle aktieafkast,
1922-99**



**Figur 2. 5-årige nominelle aktieafkast,
1922-95**



**Figur 3. 10-årige nominelle
aktieafkast, 1922-90**

